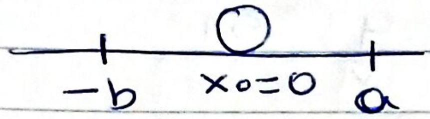
9° Μάθημα

9/12/2019

Τυχαίος Περίπατος με 2 φράγματα απορ/σης:

Έστω ένας Τ.Π. που περιγράφεται ως εξής:
η αρχική θέση $X_0=0$
η θέση του την n-οστή χρον. στιγμή προσδιορίζεται από τη σχέση: $X_n = Y_1+Y_2+\dots+Y_n$
όπου Y_i η τ.μ. που περιγράφει την i-οστή μετατόπιση.
Υποθέτουμε ότι Y_i, $i=1,\dots,n$ είναι ανεξ. κ' ισόνομες τ.μ. με $\mu = E Y_i < +\infty$, $\sigma^2 = Var Y_i < +\infty$
Τέλος υποθέτουμε ότι $g(s)=E(e^{sY})$ η ροπογεννήτρια της Y (η τ.μ. των μετ/σεων)
Τέλος υποθ. ότι υπάρχουν 2 σημεία απορρόφησης τα σημεία $a, -b$ με $a,b>0$



Για αυτήν τη σ.δ. ισχύει η λεγόμενη ταυτότητα του Wald:

$$E\left[g(s)^{-T} e^{X_T s}\right] = 1 \quad \forall s \in S$$

όπου X_T η τ.μ. που παριστάνει τη θέση της σ.δ. κατά τη χρον. στιγμή της απορ/σης και T η τ.μ. που περιγράφει το χρόνο για την απορ/ση

να σταματήσει

1° ερώτημα: P(τελ/κής απορ/σης) =
= $1 - P$(να κινείται το σημείο απεριόριστα)
P(κινείται απεριόριστα) $= P(-b \le X_n \le a)$
$\le P(-b \le X_n^* \le a)$
όπου X_n^* η σ.δ. του Ε.Α.Τ.Π.

Γνωρίζουμε ότι $X_n^* = \sum_{i=1}^{n} Z_i$

με $P(Z_i=z) = \begin{cases} p & , z=1 \\ q & , z=-1 \\ 1-p-q & , z=0 \end{cases}$

όπου $\mu_1 = E(Z_i) = p-q$, $\sigma_1^2 = Var Z_i = p+q-(p-q)^2$
(βλ. αναλυτικά προηγ. μάθημα)

$$P(-b < X_n < a) \le P\left(-b < \sum_{i=1}^{n} Z_i < a\right)$$

Κ.Ο.Θ.

$$\simeq \Phi\left(\frac{a-n\mu_1}{\sqrt{n\cdot\sigma_1^2}}\right) - \Phi\left(\frac{-b-n\mu_1}{\sqrt{n\cdot\sigma_1^2}}\right)$$

$$\xrightarrow{n \to +\infty} \begin{cases} \mu_1 = 0 \\ \mu_1 > 0 \\ \mu_1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} \Phi(0) - \Phi(0) & \mu_1 = 0 \\ \Phi(-\infty) - \Phi(-\infty) & \mu_1 > 0 \\ \Phi(+\infty) - \Phi(+\infty) & \mu_1 < 0 \end{cases}$$

2ο ερώτημα: $P(\text{τελ. απορρ. στο } a) = A = P(X_T = a)$
$P(\text{τελ. απορρ στο } -b) = B = P(X_T = -b)$

Ήδη γνωρίζω $\boxed{A+B=1}$

X_T έχει ως δυνατές τιμές a, $-b$

$$g(s) = E(e^{sY})$$

Έστω ότι $\exists s_0$ με $s_0 \neq 0$ τ/ω $g(s_0)=1$
Ταυτότητα Wald μας δίνει $E(e^{X_T s_0}) = 1 \xrightarrow[\text{τιμές } a,-b]{X_T \text{ διακριτ}}$

$$e^{a s_0} P(X_T = a) + e^{-b\cdot s_0} \cdot P(X_T = -b) = 1$$

$$\Rightarrow e^{a\cdot s_0} \cdot A + e^{-b\cdot s_0}(1-A) = 1$$

$$\Rightarrow A = \frac{1 - e^{-b\cdot s_0}}{e^{a s_0} - e^{-b s_0}} \Rightarrow B = 1 - A = \frac{e^{a s_0} - 1}{e^{a s_0} - e^{-b s_0}}$$

όπου s_0 τ/ω $g(s_0) = 1$ με $s_0 \neq 0$

- Πότε $\exists\ s_0 \neq 0$ τ.ω. $g(s_0)=1$?
- α. Όταν $\mu = EY \neq 0$

β. Όταν $\nexists\ s_0 \neq 0$ $g(s_0)=1$ οι πιθ. απορρόφησης είναι:

$$A = P(X_T = a) = \lim_{s_0 \to 0} \frac{1-e^{-bs_0}}{e^{as_0}-e^{-bs_0}} =$$

$$= \lim_{s_0 \to 0} \frac{be^{-bs_0}}{ae^{as_0}+be^{-bs_0}} = \frac{a}{a+b}$$

Άρα

$$A = \begin{cases} \dfrac{1-e^{-bs_0}}{e^{as_0}-e^{-bs_0}} & s_0 \neq 0\ (\mu \neq 0) \\ \dfrac{b}{a+b} & s_0 = 0\ (\mu = 0) \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} \dfrac{e^{as_0}-1}{e^{as_0}-e^{-bs_0}} & s_0 \neq 0\ (\mu \neq 0) \\ \dfrac{a}{a+b} & s_0 = 0\ (\mu = 0) \end{cases}$$

3ο ερώτημα: Μέσο χρόνο απορρόφησης $\equiv E(T)$

$$E\left(-T \cdot g(s)^{-T-1} g'(s) e^{X_T \cdot s} + g(s)^{-T} \cdot X_T \cdot e^{X_T s}\right) = 0$$

$s=0$

$g(s) = E(e^{sY})$

$g(0)=1$

$$E(-T\, g'(0) + X_T) = 0$$

$$g'(s) = E(Ye^{sY})$$

$$g'(0) = E(Y) = \mu$$

$$E(-T\mu + X_T) = 0 \Rightarrow \mu \cdot E(T) = E(X_T)$$

$$E(T) = \frac{E(X_T)}{\mu}, \quad \mu \neq 0$$

$$E(X_T) = a \cdot P(X_T = a) - b\,P(X_T = -b)$$
$$= aA - bB = aA - b(1-A)$$
$$E\,X_T^2 = a^2 \cdot P(X_T = a) + b^2\,P(X_T = -b)$$

Τυχαίος περίπατος με 1 φράγμα απορ στο a:

$$P(\text{απορ. στο } a) = \lim_{b\to+\infty} P\left(\begin{matrix}\text{απορ. στο } a \\ \text{ενώ } \exists \text{ φράγμα απορ.} \\ \text{και στο } -b\end{matrix}\right)$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{b\to+\infty} \dfrac{b}{a+b} = 1, & s_0 = 0\ (\mu = 0) \\ \lim\limits_{b\to+\infty} \dfrac{1 - e^{-bs_0}}{e^{as_0} - e^{-bs_0}}, & s_0 \neq 0\ (\mu \neq 0) \end{cases}$$

Για το $s_0 \neq 0$ παίρνω περιπτώσεις.

$s_0 > 0$: $\lim\limits_{b\to+\infty} \dfrac{1 - e^{-bs_0}}{e^{as_0} - e^{-bs_0}} = \dfrac{1}{e^{as_0}}$

$s_0 < 0$: $\lim\limits_{b\to+\infty} \dfrac{1 - e^{-bs_0}}{e^{as_0} - e^{-bs_0}} = 1$

$s_0 = 0$: 1

$$A' = \begin{cases} \dfrac{1}{e^{as_0}}, & s_0 > 0 \\ 1, & \text{αλλιώ} \\ & (s_0 = 0,\ s < 0) \end{cases}$$

Τυχαίο Περίπατος με 1 φράγμα απορ. στο −b

$-b \qquad x_0=0$

$$P(\text{απορ. στο } -b) = \lim_{a\to+\infty} P\left(\begin{array}{c}\text{απορ. στο } -b \\ \text{ενώ } \exists \text{ φράγμα και} \\ \text{στο } a\end{array}\right)$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{a\to+\infty} \dfrac{a}{a+b} = 1 & , s_0=0 \\[2ex] \lim\limits_{a\to+\infty} \dfrac{e^{as_0}-1}{e^{as_0}-e^{-bs_0}} = \dfrac{1}{e^{-bs_0}} & , s_0<0 \\[2ex] \lim\limits_{a\to+\infty} \dfrac{e^{as_0}-1}{e^{as_0}-e^{-bs_0}} = 1 & , s_0>0. \end{cases}$$

$$B' = \begin{cases} \dfrac{1}{e^{-bs_0}} & , s_0<0 \\[2ex] 1 & , \text{αλλού } (s_0=0,\ s_0>0) \end{cases}$$

→ εσύ!

19 $P(\text{νίκης } 1€) = 1/2 = p$
$P(\text{χάσει } 1€) = 1/3 = q$
$P(\text{ισοπαλία}) = 1 - 1/2 - 1/3 = 1-p-q$
15€ ή 0€ σταματά.

σταματά η κίνηση ⇒ απορροφάται ⇒ έχω να κάνω με φράγματα απορ.

Έστω X_n: η τ.μ. που παριστάνει το κέρδος του παίκτη μετά το τέλος του n-οστού παιχνιδιού. ή αμέσως μετά το τέλος του n-οστού παιχνιδιού με $X_0=0$.
Πρόκειται για τυχαίο περίπατο με 2 φράγματα απορ. στο $a=5$ και $b=-10$

Επιπλέον η θέση του σωματιδίου την n-οστή χρονική στιγμή:

$$X_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$$, όπου Y_i η τ.μ. που παριστάνει την i-οστή μετατόπιση με $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ είναι ανεξ. κ' ισόνομες τ.μ. με:

$$P(Y_i = 1) = 1/2 = p$$
$$P(Y_i = -1) = 1/2 = q$$
$$P(Y_i = 0) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 1 - p - q$$

Είναι $\mu = E(Y) = 1 \cdot p - 1 \cdot q = p - q = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \neq 0$

$$\sigma^2 = \operatorname{Var} Y = p + q - (p - q)^2$$

Επιπλέον $g(s) = E(e^{sY})$

με $g(s) = e^{s \cdot 1} \cdot P(Y=1) + e^{s \cdot (-1)} P(Y=-1) + e^{s \cdot 0} \cdot P(Y=0)$

$$= pe^s + q \cdot e^{-s} + (1-p-q)$$

Ισχύει ότι .... από ταυτότητα Wald

$$E\left[g(s)^{-T} e^{X_T \cdot s}\right] = 1 \quad \forall s$$

1°: $P(T \in \lambda \text{ απ}) = 1$ (αποδειξη σημ.)

2°: θα λύσω τη σχέση $g(s_0) = 1$.

$$1 = pe^{s_0} + q \cdot e^{-s_0} + (1 - p - q)$$
$$0 = pe^{s_0} + q e^{-s_0} - (p+q) = 0$$
$$0 = p(e^{s_0})^2 + q - (p+q) e^{s_0} = 0$$

$\lambda = e^{s_0}$ και έχω $p\lambda^2 - (p+q)\lambda + q = 0$

$$\Delta = (p+q)^2 - 4pq = (p-q)^2$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{(p+q) \pm \sqrt{(p-q)^2}}{2p} = \begin{cases} 1 \\ \frac{q}{p} \end{cases}$$

$e^{s_0} = 1 \Rightarrow s_0 = 0$

$e^{s_0} = \frac{q}{p} \Rightarrow \boxed{s_0 = \ln \frac{q}{p}}$

Υπάρχει $s_0 = \ln \frac{q}{p}$ για το οποίο $g(s_0) = 1$

(4₁) Έστω τ.π. που η θέση του την n-οστή στιγμή περιγράφεται $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, $X_0 = 0$

$$P(Y_i = y) = \begin{cases} 1/4, & y = 1 \\ 1/4, & y = 2 \\ 1/2, & y = -2. \end{cases}$$

Υποθέτουμε ότι $\exists$ 2 φράγματα απορ.
Να υπολ. ο $E(T)$ και $P(\text{απορ})$

$$E(Y) = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \overset{(\neq 0)}{<} +\infty$$

$$\operatorname{Var} Y = E(Y)^2 - (E(Y))^2$$

$$EY^2 = \frac{1}{4} 1^2 + \frac{1}{4} 2^2 + \frac{1}{2} (-2) < +\infty$$

$$g(s) = E(e^{sY}) = e^{s1} \cdot \frac{1}{4} + e^{s2} \frac{1}{4} + e^{s(-2)} \cdot \frac{1}{2}$$

Επειδή $\mu \neq 0$ $\exists$ $s_0 \neq 0$ $g(s_0) = 1$

1° $P(\text{τελ. απ}) = 1$

2° A, B με $s_0 \neq 0$

3° $E(T)$ με $\mu \neq 0$

$$E(T) = \frac{E(X_T)}{\mu}$$

— γαστοχία εκφωνησης: Θα έπρεπε να λέει διακύμανση πεπερασμένη.

45 $E(Y_i) = \mu = 7$

1° $P(T\epsilon\lambda.\ \alpha\pi o\rho) = 1$

2° 3° $s_0 \neq 0$

47 $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i \qquad Y_i \sim N(10, 2^2)$

2 φραγμ. απορ. στο a κ' στο $-b$.
αρχικά είναι σεν θέση 0.

$E(Y_i) = 10 \neq 0$ κ' πεπερ.

$Var\, Y_i = 4 < +\infty$

Αφού $\mu \neq 0$ $\exists\, s_0 \neq 0$ τ/ω $g(s_0) = 1$

Μπορώ να το προσδιορίσω?

Τυπολόγιο: Ροπ/τρια $N(\mu, \sigma^2)$: $g(s) = e^{\mu s + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2}$

$e^{\mu \cdot s_0 + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot s_0^2} = 1 \Rightarrow$

$\mu \cdot s_0 + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot s_0^2 = 0 \Rightarrow$

$s_0\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot s_0\right) = 0$

$\Rightarrow s_0 = 0$ κ' $s_0 = \frac{-2\mu}{\sigma^2} = \frac{-2 \cdot 10}{4} = -5$

48 μέχρι το δ (αν θέλω να ασχοληθώ με αυτή την άσκηση)